

Előadás követő fóliák a Matematika mérnököknek II. című tárgyhoz

Burai Pál

Differenciálegyenletek numerikus megoldása

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Fokozatos közelítés módszere

$$(1) \quad x'(t) = f(t, x(t)), \quad x \in I,$$

$$(2) \quad x(\xi) = \eta.$$

Az (1)-(2) kezdeti érték probléma ekvivalens a következő integrálegyenlettel:

$$x(t) = \eta + \underbrace{\int_{\xi}^t f(s, x(s)) ds}_{(Tx)(t)}$$

Bebizonyítható, hogy az így definiált T operátor teljesíti a Banach-féle fixponttétel feltételeit, ha teljesülnek az egzisztencia és unicitási tétel feltételei. A T operátor fixpontja, ami jelen esetben egy függvény, megoldása lesz az (1)-(2) kezdeti érték problémának. A nemlineáris egyenleteknél alkalmazott módszerhez hasonlóan, a Banach iteráció itt is egy közelítő megoldása lesz a kezdeti érték problémának.

$$x_0(t) = \eta, \quad x_{n+1}(t) = T(x_n(t))$$

Példa

Tekintsük az

$$x' = x, \quad x(0) = 1$$

kezdeti érték problémát. Ennek $x(t) = e^t$ lesz a kezdeti feltételt kielégítő, egyértelmű megoldása. Ekkor $\xi = 0$, $\eta = 1$, $x_0(t) = 1$.

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t 1 \, ds = 1 + t, \quad x_2(t) = 1 + \int_0^t 1 + s \, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

belátható, hogy

$$x_n(t) = 1 + \int_0^t 1 + s + \dots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} \, ds = 1 + t + \dots + \frac{t^n}{n!},$$

ami pontosan az e^t függvény sorfejtésének n . részletösszege.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi kezdeti érték problémák megoldását fokozatos közelítés módszerével!

- $\dot{x} = 2x - t, \quad x(0) = 1,$
- $y' = y(3 - y), \quad x(0) = 1,$
- $y'(t) = -y(t) + \cos(t), \quad y(0) = 0,$
- $\dot{x} = 2x - t, \quad x(1) = 1.$

Emlékeztető

Taylor tétel: Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -szer folytonosan differenciálható $]a, b[$ -n és az n . derivált folytonos $[a, b]$ -n, ekkor tetszőleges $\bar{x}, x \in [a, b]$ esetén létezik olyan β az x és \bar{x} között, hogy

$$f(x) = \underbrace{f(\bar{x}) + \frac{f'(\bar{x})}{1!}(x - \bar{x}) + \dots + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x - \bar{x})^n}_{n. \text{ Taylor polinom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(x - \bar{x})^{n+1}}_{\text{hibatag}}$$

Ha a kezdeti érték problémában f n -szer differenciálható (ξ, η) egy környezetében, akkor x $(n+1)$ -szer differenciálható ξ egy környezetében, így a Taylor tételből következően létezik olyan β t és ξ között, hogy

$$x(t) = x(\xi) + \frac{x'(\xi)}{1!}(t - \xi) + \dots + \frac{x^{(n)}(\xi)}{n!}(t - \xi)^n + \frac{x^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(t - \xi)^{n+1}$$

Az előbbieket figyelembe véve

$$\tilde{x}(t) = x(\xi) + \frac{x'(\xi)}{1!}(t - \xi) + \cdots + \frac{x^{(n)}(\xi)}{n!}(t - \xi)^n$$

a probléma egy közelítő megoldása, amelynek hibájára

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| = \frac{1}{(n+1)!} |x^{(n+1)}(\beta)(t - \xi)^{n+1}| \leq K |(t - \xi)^{n+1}| =: \mathcal{O}((t - \xi)^{n+1})$$

teljesül, ha az $(n+1)$ derivált korlátos.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ "nagy ordó" $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, ha létezik $K < 0$ konstans, hogy

$$|g(t)| \leq K|f(t)|, \quad t \in I.$$

Jele: $g = \mathcal{O}(f)$.

A kezdeti érték probléma egyenletét deriválva különböző rendű közelítéseket kaphatunk a megoldásra, amelyet $n = 1$ esetén **Euler módszernek** nevezünk.

$n = 2$ esetén

$$x(\xi) = \eta, \quad x'(\xi) = f(\xi, \eta), \quad x''(t) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} f(t, x) \Rightarrow$$
$$x''(\xi) = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial t} + \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} f(\xi, \eta).$$

Az eljárást folytatva magasabb rendű Taylor közelítéseket kaphatunk, melyek képlete bonyolultabb lesz.

Az előbbieket figyelembe véve, ha $n = 1$, akkor

$$x(t) = x(\xi) + \underbrace{x'(\xi)(t - \xi)}_{=:h} + \mathcal{O}((t - \xi)^2) = \underbrace{\eta + hf(\xi, \eta)}_{\text{Euler közelítés}} + \mathcal{O}(h^2).$$

Euler módszer

Tegyük fel, hogy a kezdeti érték probléma megoldását a $[\xi, \bar{t}]$ intervallumon akarjuk közelíteni. Legyen $h := \frac{\bar{t} - \xi}{n}$ valamely adott $n \in \mathbb{N}$ -re. Ekkor az iteráció a következő:

$$\begin{aligned} t_0 &= \xi, & x_0 &= \eta, \\ t_{i+1} &= t_i + h, & x_{i+1} &= x_i + hf(t_i, x_i), & i &= 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

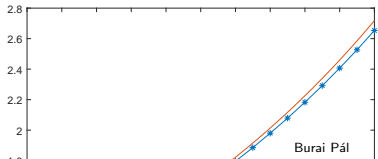
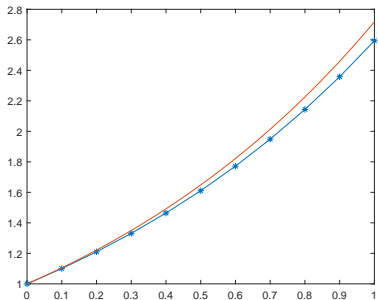
Feladat

Határozzuk meg az alábbi kezdeti érték problémák közelítő megoldását Euler módszerrel az I intervallumon, a megadott h lépésközzel!

- $\dot{x}(t) = tx(t)$, $x(0) = 1$, $I = [0, 1]$, $h = 0.25$,
- $x' = 3x(1 - x)$, $x(0) = 0.1$, $I = [0, 2.5]$, $h = 0.5$.

Példa

Az $x' = x$, $x(0) = 1$ kezdeti érték probléma közelítése Euler módszerrel a $[0, 1]$ intervallumon $h = 0.1$ és $h = 0.05$ lépésközzel:



Taylor sor módszer, Euler módszer

Ha $n = 2$, akkor a korábban definiált h -val kapjuk, hogy

$$x(t) = \underbrace{\eta + hf(\xi, \eta) + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial t} + f(\xi, \eta) \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} \right)}_{\text{másodrendű Taylor közelítés}} + \mathcal{O}((t - \xi)^3)$$

Taylor módszer $n = 2$ esetén

Tegyük fel, hogy a kezdeti érték probléma megoldását a $[\xi, \bar{t}]$ intervallumon akarjuk közelíteni. Legyen $h := \frac{\bar{t} - \xi}{n}$ valamely adott $n \in \mathbb{N}$ -re. Ekkor az iteráció a következő:

$$t_0 = \xi,$$

$$x_0 = \eta,$$

$$t_{i+1} = t_i + h, \quad x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial f(t_i, x_i)}{\partial t} + f(t_i, x_i) \frac{\partial f(t_i, x_i)}{\partial x} \right),$$

$$i = 0, \dots, n - 1.$$

Definíció

A

$$g_i := \underbrace{\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h}}_{\approx x'(t_i)} - f(t_i, x(t_i))$$

mennyiséget az Euler módszer **lokális hibájának** vagy **képlethibájának** nevezzük. A (1)-(2) kezdeti érték probléma megoldására szolgáló numerikus módszer egy F függvényosztályban **p ed rendben konzisztens** ($p > 0$), ha minden $f \in F$ esetén a módszer képlethibájára teljesül, hogy

$$|g_i| = \mathcal{O}(h^p).$$

Az Euler módszer képlethibája

Bebizonyítható, hogy ha f folytonosan differenciálható, akkor

$$|g_i| \leq \frac{h}{2} \max_{t \in [\xi, \bar{t}]} |x''| = \mathcal{O}(h).$$

Az előbbiek szerint az Euler-módszer a folytonosan differenciálható F függvényosztályban első rendben konzisztens.

Definíció

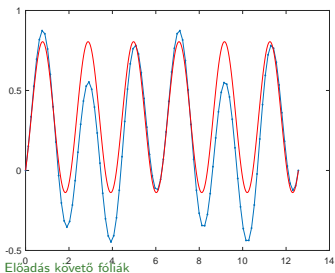
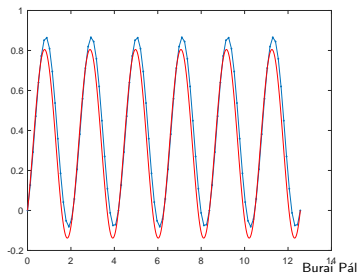
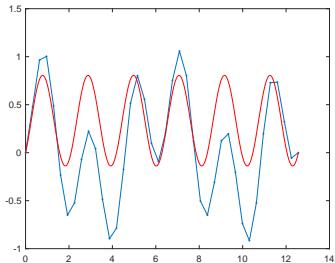
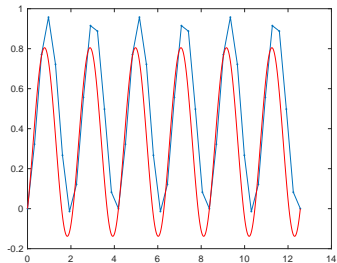
A pontos és a számított érték közötti különbséget

$$G_i := x(t_i) - x_i$$

az Euler módszer **globális hibájának** nevezzük.

Taylor sor módszer, Euler módszer

Az $x' = \sin(3t) + \cos(3t)$, $x(0) = 0$ kezdeti érték probléma megoldása Euler- illetve Taylor módszerrel ($n = 2$) 40 illetve 100 osztópont esetén.



Definíció

A (1)-(2) kezdeti érték probléma megoldására szolgáló numerikus módszer egy F függvényosztályban **p ed rendben konvergens** ($p > 0$), ha minden $f \in F$ esetén a módszer globális hibájára teljesül, hogy

$$|G_i| = \mathcal{O}(h^p).$$

Az Euler módszer globális hibája

Bebizonyítható, hogy ha f Lipschitz folytonos L konstanssal, akkor

$$|G_i| \leq e^{Lt_i} \left(|G_0| + \sum_{k=0}^{i-1} |g_k| h \right)$$

Az előbbi módszereket gyakorlatban csak nagyméretű, nem lineáris rendszerek esetében alkalmazzák a lassú konvergencia miatt. Az Euler módszert a következőképpen javíthatjuk egy egyszerű módosítással:

Explicit Runge-Kutta képlet I

Tegyük fel, hogy a kezdeti érték probléma megoldását a $[\xi, \bar{t}]$ intervallumon akarjuk közelíteni. Legyen $h := \frac{\bar{t} - \xi}{n}$ valamely adott $n \in \mathbb{N}$ -re. Ekkor az iteráció a következő:

$$\begin{aligned} t_0 &= \xi, & x_0 &= \eta, & t_{i+1} &= t_i + h, \\ k_1 &= f(t_i, x_i), & k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_1\right), & x_{i+1} &= x_i + hk_2, \end{aligned}$$

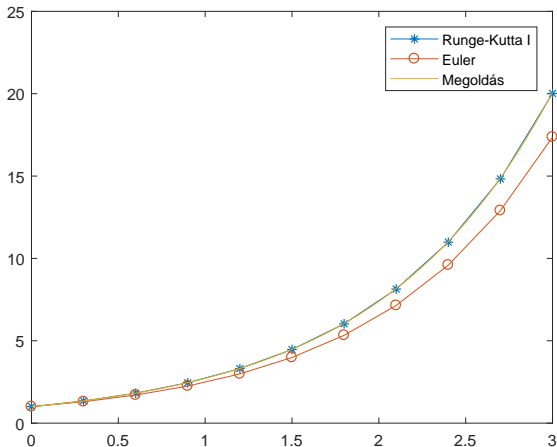
$$i = 0, \dots, n - 1.$$

Runge-Kutta módszerek

Az

$$x' = x, \quad x(0) = 1$$

kezdeti érték probléma megoldásának közelítése Euler illetve Runge-Kutta módszerrel a $[0, 3]$ intervallumon 10 osztópont esetén.

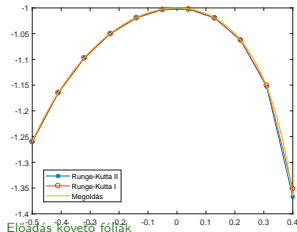
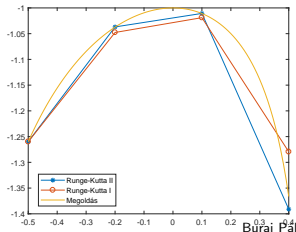


Explicit Runge-Kutta képlet II

A Runge-Kutta képlet I feltételei mellett:

$$\begin{aligned}t_0 &= \xi, & x_0 &= \eta, & t_{i+1} &= t_i + h, & k_1 &= f(t_i, x_i), \\k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_1\right), & k_3 &= f\left(t_i + h, x_i - hk_1 + 2hk_2\right), \\x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), & & & i &= 0, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Az $x' = \frac{-x}{1+t} - (1+t)x^4$, $x(0) = -1$ Bernoulli egyenletre vonatkozó kezdeti érték probléma közelítő megoldása 3, illetve 10 osztópont esetén.



Explicit Runge-Kutta képlet III

A Runge-Kutta képlet I feltételei mellett:

$$\begin{aligned}t_0 &= \xi, & x_0 &= \eta, & t_{i+1} &= t_i + h, & k_1 &= f(t_i, x_i), & k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_2\right), & k_4 &= f(t_i + h, x_i + hk_3), \\x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), & i &= 0, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Általános, explicit Runge-Kutta képlet

$$k_j = f\left(t + ha_j, x + h \sum_{l=1}^{j-1} b_{j,l} k_l\right), \quad j = 1, \dots, s,$$

ahol a konstansok az adott módszert jellemzik, függetlenek f -től, x -től és h -tól. Megfelelő feltételek mellett mind a lokális, mind a globális hibára $\mathcal{O}(h^5)$ becslést kapunk.

Magasabb rendű egyenletek numerikus megoldása

Az n -ed rendű egyenletet a korábbiaknak megfelelően átírjuk n darab elsőrendű egyenletet tartalmazó differenciálegyenlet rendszerré. Ekkor az

$$Y' = f(t, Y)$$

szeparábilis egyenletet kapjuk (itt $Y^T = (y_1, \dots, y_n)$), amelyre formálisan alkalmazhatjuk az elsőrendű egyenletekre kapott numerikus módszereket.

Példa: Tekintsük az $x'' - 8x' + 16x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 5$, ekkor a megoldás $x = e^{4t}(1 + t)$. Vezessük be az $y_1 = x$, $y_2 = x'$ jelöléseket. Ekkor fennáll az

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2, & y_1(0) &= 1 \\y_2' &= 8y_2 - 16y_1, & y_2(0) &= 5\end{aligned}$$

differenciálegyenlet rendszerre vonatkozó kezdeti érték probléma. Ebből

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = Y' = f(t, Y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ 8y_2 - 16y_1 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Megoldás fokozatos közelítéssel

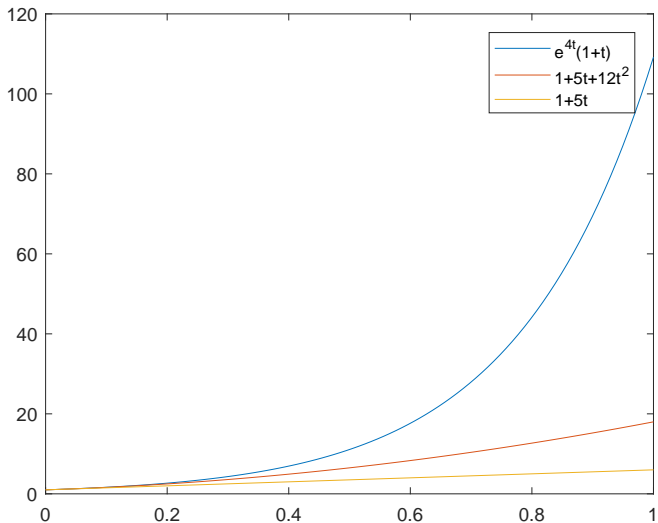
$$Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad Y_1 = Y_0 + \int_0^t f(s, Y_0) ds = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 5 \\ 40 - 16 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 1 + 5t \\ 5 + 24t \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = Y_0 + \int_0^t f(s, Y_1) ds = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 5 + 24s \\ 40 + 192s - 16 - 80s \end{bmatrix} ds$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 + 5t + 12t^2 \\ 5 + 24t + 56t^2 \end{bmatrix}$$

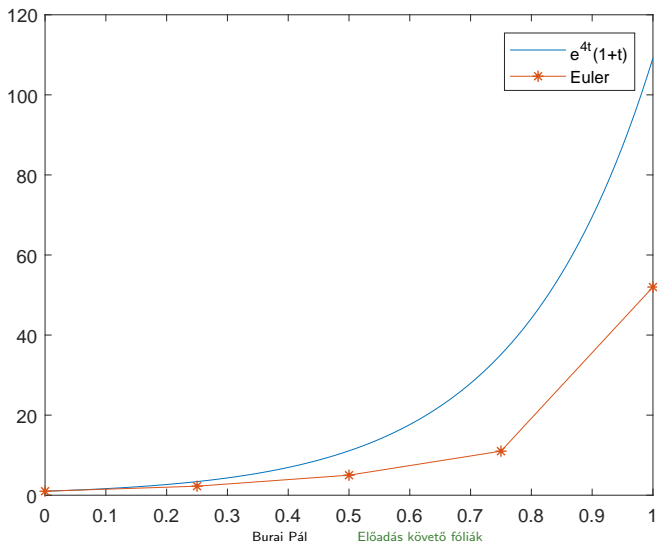
$$x = y_1 \approx 1 + 5t + 12t^2$$

Magasabb rendű egyenletek numerikus megoldása



Magasabb rendű egyenletek numerikus megoldása

Az előző egyenlet numerikus megoldása Euler módszerrel $h = 0.25$ lépésközzel a $[0, 1]$ intervallumon:



A kiadott feladatokat legfeljebb három fős csoportok végezhetik el.

- Egy nemlineáris egyenletre vonatkozó kezdeti érték probléma megoldása adott intervallumon Euler módszerrel és valamelyik Runge-Kutta módszerrel, különböző beosztásokkal. A megoldások leprogramozása Matlabban. Ábrák készítése, az egész munka írásban való dokumentálása.
- Egy magasabb rendű egyenletre vonatkozó kezdeti érték probléma átírása differenciálegyenlet rendszerre, megoldása adott valamilyen numerikus módszerrel különböző beosztásokkal. A megoldások leprogramozása Matlabban. Ábrák készítése, az egész munka írásban való dokumentálása.